Ukážeme si – pomocí „Saddle Point Theorem" (viz text POKROKY), že okrajová úloha

$$\begin{cases} -u'' = u + g(u) - h(x) & \text{v } (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

má za předpokladů

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ spojitá a omezená
- $h \in L^2(0,\pi)$
- (*) $g(-\infty)\int_0^\pi \sin x \, dx < \int_0^\pi h(x) \sin x \, dx < g(+\infty) \int_0^\pi \sin x \, dx$

alespoň jedno slabé řešení,

tzn. $\exists u \in W_0^{1,2}(0,\pi) \ \forall v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$:

$$\int_0^\pi u'v' = \int_0^\pi u v + \int_0^\pi g(u) v - \int_0^\pi h v$$

(Dodejme pro úplnost:

Vyměníme-li předpoklad (*) za předpoklad

$$g(+\infty)\int \sin x < \int h \sin x < g(-\infty) \int \sin x,$$

opět bude existovat alespoň jedno slabé řešení. Provedením důkazu by byl

Ekelandův variační princip)

Důkaz. Uvažujme funkcionál
$$J : W_0^{1,2}(0,\pi) \to \mathbb{R}$$
$$J(u) := \frac{1}{2}\int (u')^2 - \frac{1}{2}\int u^2 - \int G(u) + \int h u,$$
kde
$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds .$$
Pak $J \in C^1(W_0^{1,2}(0,\pi))$ a $\forall v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$:
$$\langle J'(u), v\rangle = \int u'v' - \int uv - \int g(u)v + \int hv,$$
proto slabá řešení naší úlohy odpovídají kritickým bodům J.

1) $\boxed{J \text{ splňuje (PS) podmínku}}$

Dk. Buď $\boxed{(J(u_n)) \text{ omezená, } J'(u_n) \to 0}$. Máme ukázat, že z posl. (u_n) lze vybrat konvergentní.

Nejdříve dokážeme, že posloupnost (u_n) je omezená.

Předpokládejme sporem, že
$$\|u_n\| \to \infty .$$

Položme $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \in W_0^{1,2} \subset\subset C(\langle 0,\pi\rangle)$

$$\Downarrow$$

$\exists v$ a podposloupnost (značme ji stejně) (v_n) tak, že

$$v_n \rightharpoonup v \quad v \quad W_0^{1,2}$$

$$v_n \to v \quad v \quad C(\langle 0,\pi\rangle)$$

$(J(u_n))$ je omezená, $\|u_n\| \to \infty$

$$\Downarrow$$

$$\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\int (v_n')^2 - \frac{1}{2}\int v_n^2 - \int \frac{G(u_n)}{\|u_n\|^2} + \int h \frac{u_n}{\|u_n\|^2} \to 0$$

- $$\left|\int \frac{G(u_n)}{\|u_n\|^2}\right| \le \int \frac{\left|\int_0^{u_n} g(s)\,ds\right|}{\|u_n\|^2} \le \int \frac{c\,|u_n|}{\|u_n\|} \cdot \frac{1}{\|u_n\|} \le \frac{K}{\|u_n\|} \to 0$$

  $|v_n|$

- $$\int h \frac{u_n}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{\|u_n\|} \underbrace{\int h v_n}_{\to \int h v} \to 0$$

$$\Rightarrow \int (v_n')^2 - \underbrace{\int v_n^2}_{\to \int v^2} \to 0 \Rightarrow \int (v_n')^2 \to \int v^2$$

Charakterizace 1. vlastního čísla $\lambda_1 = 1$

a dostaneme zdola polospojitost normy implikuje: (4)

$$1.\ \int v^2 \le \int (v')^2 \le \liminf \int (v_n')^2 = \lim \int (v_n')^2 = \int v^2$$

$\Downarrow$ (musí platit rovnost!)

$$\int (v')^2 = \int v^2, \quad \|v\| = 1$$

Taktéž

$$\left.\begin{array}{l} v_n \rightharpoonup v \\ \|v_n\| \to \|v\| \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \to v \text{ v } W_0^{1,2}(0,\pi)$$

v je „první vlastní funkce", tzn.

$v = a \sin x$ nebo $v = -a \sin x$, kde $a > 0$.

Předpokládejme, že $\boxed{v = a \sin x}$

$$0 \leftarrow \frac{\langle J'(u_n), u_n\rangle - 2J(u_n)}{\|u_n\|} = \int \frac{2G(u_n) - g(u_n)u_n}{\|u_n\|} - \underbrace{\int h \frac{u_n}{\|u_n\|}}_{\to \int h v}$$

$$F(x) := \begin{cases} \frac{2}{x}\int_0^x g(s)\,ds - g(x), & x \neq 0 \\ g(0), & x = 0 \end{cases}$$

F je spojitá v $\mathbb{R}$, $F(\pm\infty) = g(\pm\infty)$ (l'Hospital)

Zjistili jsme

$$\int h v = \lim \int \frac{2\int_0^{u_n} g(s)\,ds - g(u_n)u_n}{\|u_n\|} =$$

$$= \lim \int F(u_n) \cdot \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

Navíc $\frac{u_n}{\|u_n\|} \to v = a \cdot \sin x$ v $C(\langle 0,\pi\rangle)$,

a proto $u_n \to \infty$

Takže limitním přechodem (Lebesgue):

$$\int h v = \int h\, a \sin x = \int g(+\infty) \cdot v = g(+\infty) \int a \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int h \sin x = g(+\infty) \int \sin x},$$

a to je spor s $(*)$.

Posloupnost (u_n) je omezená

Můžeme tedy předpokládat, že („po vybrání")

$u_n \rightharpoonup u$ v $W_0^{1,2}(0,\pi)$

$u_n \to u$ v $C(\langle 0,\pi\rangle)$

6

Odtud

$0 \leftarrow \langle J'(u_n), u_n - u \rangle =$

$$= \int u_n'(u_n-u)' - \underbrace{\int u_n(u_n-u)}_{\to} - \underbrace{\int g(u_n)(u_n-u)}_{\to 0} + \underbrace{\int h(u_n-u)}_{\to 0}$$

(Hölder)

Proto

$$0 = \lim \int u_n'(u_n-u)' = \lim \Big[\int u_n'(u_n-u)' - \underbrace{\int u'(u_n-u)'}_{\to 0}\Big] =$$

$$= \lim \int |(u_n-u)'|^2 = \|u_n-u\|^2 \implies u_n \to u$$

v $W_0^{1,2}(0,\pi)$

cbd 1)

2) J má „geometrii sedlového bodu".

Uvažujme $W_0^{1,2}(0,\pi) = Y \oplus Z$,

kde $Y = \{a \sin x : a \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{u \in W_0^{1,2}(0,\pi) : \int_0^\pi u \cdot \sin x = 0\}$

Dokážeme

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } J(a \sin x) \to -\infty \text{ pro } |a| \to \infty, \\ \text{b) } J \text{ je na } Z \text{ omezený zdola} \end{array}}$$

Ad a) Předpokládejme sporem, že

- $\lim a_n = +\infty$ (pro $\lim a_n = -\infty$ lze postupovat analogicky)
- $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ J(a_n \sin x) \geq C$

Odtud plyne, že $\liminf \frac{J(a_n \sin x)}{a_n} \geq 0$,

a proto

$$0 \leq \liminf \frac{J(a_n \sin x)}{a_n} \leq \limsup \frac{J(a_n \sin x)}{a_n} =$$

$$= \limsup \left[-\int \frac{G(a_n \sin x)}{a_n} + \int h \sin x \, dx \right] =$$

$$= -\liminf \left(\int \ldots \right) + \int h \sin x \, dx \leq$$

FATOUOVO LEMMA

$$\leq -\int \underbrace{\liminf \frac{\int_0^{a_n \sin x} g(s)\,ds}{a_n \cdot \sin x}}_{\to g(+\infty)\ (\text{l'Hospital})} \cdot \sin x + \int h \sin x =$$

$$= -\int g(+\infty) \cdot \sin x + \int h \sin x \implies$$

$$\implies g(+\infty) \int_0^{\pi} \sin x \, dx \leq \int h \sin x \, dx, \text{ a to}$$

je spor s (*)

Ad a)

Ad b) Nejdříve si dokážeme pomocné tvrzení:

$$\boxed{\exists \bar\lambda > 1 \ \forall u \in Z: \ \int (u')^2 \geq \bar\lambda \cdot \int u^2}$$

Sporem. $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists u_n \in Z: \ \int (u_n')^2 < \left(1+\frac{1}{n}\right) \int u_n^2$

Položme

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}, \quad \text{pak („po nějakém")}$$

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ v } \ W_0^{1,2} \ \text{ a } \ v_n \to v \ \text{ v } \ C(\langle 0, \pi \rangle),$$

a proto

$$1 \cdot \int v^2 \leq \int (v')^2 \leq \liminf \int (v_n')^2 = \lim \int (v_n')^2 \leq 1 \cdot \int v^2$$

$$\Downarrow$$

- v je „první vlastní funkce", $v = a \cdot \sin x \notin Z$ pro nějaké $a \neq 0$
- $v_n \to v \in Z$ (Z je uzavřený vzhledem k té konvergenci), $v_n \in Z$

a to je spor.

A dokončení důkazu je již snadné!

$\forall u \in Z$:

$$J(u) = \frac{1}{2}\left[\int (u')^2 - \int u^2\right] - \int G(u) + \int h u \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \int\int_0^u g(s)\,ds + \int h u \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \int K\cdot|u| + L\cdot\sqrt{\int u^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}_{>0} - c\cdot\|u\| ,$$

a proto je J omezený zdola na Z.

<u>cbd b.</u>

<u>cbd 2)</u>

<u>cbd.</u>